19/01/16

$T: V \to W$ γραμμ. απεικ. $e=(e_1,e_2 \dots)$ βάση του V, $g=(g_1,g_2 \dots)$ βάση του W. Τότε $[T]_e^g \in F^{\dim W \times \dim V}$ με i-στήλη του $[T]_e^g$ τους συντελεστές του $T(e_i)$ συναρτήσει της βάσης g

Ορισμός: Έστω F σώμα, V δ.χ./F και $e=(e_1, \dots e_n)$ $g=(g_1, \dots g_n)$ δύο βάσεις του V. Ορίζουμε πίνακα αλλαγής βάσης από την e στην g τον πίνακα $[id_V]_e^g$. (Με άλλα λόγια είναι ο $n \times n$ πίνακας με i-στήλη τους συντελεστές του $e_i = id_V(e_i)$ συναρτήσει της βάσης g του V.

Παράδειγμα:

i) Έστω $V=\mathbb{R}^2$, $e=(e_1=(1,0), e_2=(1,1))$, $g=(g_1(1,0), g_2=(0,1))$ δύο βάσεις του V. Βρείτε τους πίνακες αλλαγής βάσης A από την e στην g, και * από την g στην e.
* τον πίνακα B αλλαγής βάσης

$A=[id_V]_e^g$. Έχουμε $e_1=(1,0)=1 \cdot g_1 + 0 \cdot g_2$. Άρα $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$e_2=(1,1)=1g_1+1g_2$

$B=[id_V]_g^e$ Έχουμε $g_1=(1,0)=1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$ Άρα $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$g_2=(0,1)=\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$
$\Leftrightarrow (0,1)=(\lambda_1+\lambda_2, \lambda_2) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2=1 \\ \lambda_1=-1 \end{cases}$

άρα $g_2=-1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$ και άρα ο B

Παρατήρηση: Παρατηρούμε A αντιστρ. και ότι $B=A^{-1}$! Αυτό δεν είναι τυχαίο. Θα το δούμε στην Γενική ε

Φυλλάδιο #6

Ασκηση 1

A) Απόδειξη ϕ γραμμική: Εχουμε:

$\varphi((x,y,z)) + (x'+y',z')) = \varphi((x+x', y+y', z+z')) =$

$((x+x'), 2(y+y'), (y+y') - (z+z'), 2(x+x') + 4(y+y')) =$

$((x+x'+2y+2y', y+y'-z-z', 2x+2x'+4y+4y')) =$

$((x+2y)+(x'+2y'), (y-z)+(y'-z'), (2x+4y)+(2x'+4y')) =$

$\phi((x,y,z)) + \varphi((x',y',z'))$

Από προσετ. ιδιότ

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ $\varphi(\lambda(x,y,z)) = \varphi((\lambda x, \lambda y, \lambda z)) =$

$(\lambda x + 2\lambda y, \lambda y - \lambda z, 2\lambda x + 4\lambda y) = \lambda(x+2y, y-z, 2x+4y) =$

$\lambda \phi((x,y,z))$

Άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$

$\varphi((x,y,z) + (x',y',z')) = \varphi((x,y,z) + \phi(x',y',z')$ και

$\varphi(\lambda(x,y,z)) = \lambda \cdot \varphi(x,y,z)$

Συμπέρασμα, ϕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ

Άσκηση 2

i) Υπολογισμός $Ker\varphi$. Φανερά $(x,y,z) \in Ker\varphi$ αν και μόνο αν $\varphi((x,y,z)) = (0,0,0)$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το $(x+2y, y-z, 2x+4y) = (0,0,0)$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ y-z=0 \\ 2x+4y=0 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του (Σ)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως (Σ) ισοδύναμο με το σύστημα

$x+2z=0$

$y-z=0$

Επομένως $Ker\varphi = \{(-2z, z, z) \; z \in \mathbb{R}\} = \langle(-2,1,1)\rangle$. Άρα $(-2,1,1)$ βάση του $Ker\varphi \Rightarrow \dim Ker\varphi = 1$

ii) Υπολογισμός Imf (Υπενθ. $\varphi: V \to W$ γραμ. $\dim V - \dim Ker\varphi = \dim Im\varphi \Rightarrow \dim Im\varphi = 3-1=2$)

Εύρεση βάσης του $Im\varphi$

Γενική Μέθοδος: Για $T: V \to W$ γραμμική

Βήμα 1ο: Βρίσκουμε βάση $e = (e_1, e_2, \dots e_n)$ του V

Βήμα 2ο: Από θεωρία $Im\varphi = \langle T(e_1), T(e_2), \dots T(e_n)\rangle$ (*)

Βήμα 3ο: Κατά τα γνωστά χρησιμοποιώντας την (*) βρίσκουμε βάση του Imf

$\varphi: \underset{V}{\mathbb{R}^3} \to \underset{W}{\mathbb{R}^3}$

Βήμα 1ο: Θεωρούμε την βάση $e = (e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$ του $\mathbb{R}^3$

Βήμα 2ο: Έχουμε
$$\phi(e_1) = \phi((1,0,0)) = (1,0,2)$$
$$\phi(e_2) = \phi((0,1,0)) = (2,1,4)$$
$$\phi(e_3) = \phi((0,0,1)) = (0,-1,0)$$

Άρα $\mathrm{Im}\phi = \langle (1,0,2), (2,1,4), (0,-1,0) \rangle$

Βήμα 3ο: Από τους γεννήτορες του $\mathrm{Im}\phi$ με τη γνωστή διαδικασία καταλήγουμε ότι το $\mathrm{Im}\phi$ έχει βάση $(1,0,2)$, $(0,1,0)$

Άσκηση 3

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \phi((x,y,z)) = (y+z, x+z, x+y)$

(Υπενθ. Ισομορφισμός σημαίνει γραμμική, 1-1 και επί)

(Παρατήρηση αν $\phi: V \to W$ γραμμ. $\dim V = \dim W$ για φ 1-1) $\xRightarrow{\text{θεωρία}}$ ϕ επί και άρα ϕ ισομορφισμός

Ισχυρισμός 1ο: ϕ γραμμική. Αρκεί να δείξουμε
$\phi((x,y,z)+(x',y',z')) = \phi((x,y,z)) + \phi((x',y',z'))$ και
$\phi(\lambda(x,y,z)) = \lambda \cdot \phi(x,y,z)$. Απόδειξη όπως στην προηγούμενη άσκηση

Ισχυρισμός 2ο: ϕ 1-1. Απόδειξη: Από θεωρία ξέρουμε
ϕ "1-1" $\iff \mathrm{Ker}\phi$ = μηδενικός υπόχωρος

Άρα αρκεί ν.δ.ο. $\mathrm{Ker}\phi = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Έστω $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}\phi \iff \phi((x,y,z)) = (0,0,0) \iff$
$(y+z, x+z, x+y) = (0,0,0) \iff$
$\phi((x,y,z)) = (0,0,0) \iff (y+z, x+z, x+y) = (0,0,0) \iff$

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} (\Sigma)$$ Άρα αρκεί νδο ότι το (Σ) έχει μόνο την τετριμμένη λύση $x=0, y=0, z=0$

Επαυξημένος Πίνακας του (Σ)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ Επομένως το (Σ) είναι ισοδύναμο με το σύστημα $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z=0 \end{cases}$

άρα αφού ισοδύναμα συστήματα έχουν τις ίδιες λύσεις $\Rightarrow$ (Σ) έχει την τετριμμένη λύση $\Rightarrow \ker\varphi = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ και αφού $\dim\mathbb{R}^3 = 3 = \dim \operatorname{Im}\varphi$ + φ γραμμική $\Rightarrow$ φ ισομορφισμός

Άσκηση 5

Γραμμικός μετασχηματισμός = Γραμμική απεικόνιση

$[T]_a^B$ [Υπενθ. Αν $T: V \to W$ a βάση του V, b βάση του $W \Rightarrow [T]_a^b \in F^{\dim W \times \dim V}$]

$\hookrightarrow \in \mathbb{R}^{4\times 3}$

Έστω $\alpha = (a_1=(1,0,2), \alpha_2=(1,1,-1), \alpha_3=(0,0,1))$

$b = (b_1=(1,0,0,0), b_2=(1,1,0,0), b_3=(1,1,1,0), b_4=(1,1,1,1))$

Από τον ορισμό:

1η ΣΤΗΛΗ A = οι συντεταγμένες του $T(a_1)$ συναρτ. της βάσης b.

2η ΣΤΗΛΗ A = '' του $T(\alpha_2)$ '' b

3η ΣΤΗΛΗ A = '' '' $T(\alpha_3)$ '' b

$T(a_1) = (1-0+2(2), 0-3(2), 2\cdot 1+0, 2) = (5,-6,2,2) =$

$\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\lambda_3 b_3+\lambda_4 b_4 = (\lambda_1+\lambda_2 \dots, \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4, \lambda_3+\lambda_4, \lambda_4)$

Ισοδύναμα $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=5 \\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=-6 \\ \lambda_3+\lambda_4=2 \\ \lambda_4=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_4=2 \\ \lambda_3=0 \\ \lambda_2=-8 \\ \lambda_1=11 \end{cases}$

Συμπεραίνουμε $T(a_1) = 11b_1 - 8b_2 + 0\cdot b_3 + 2b_4$

άρα Άσκηση

$\downarrow$

$$A = \begin{bmatrix} 11 & & \\ -8 & & \\ 0 & & \\ 2 & & \end{bmatrix}$$

Βαθμίδα Πίνακα Revisited

$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ βαθμίδα$(A) = 1$

κλιμακωτός

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ βαθμίδα$(B) = 2$

Ορισμός: Έστω $A \in F^{\nu \times \mu}$. Ο B λέγεται υποπίνακας του A αν προκύπτει από το B αφαιρώντας κάποιες (≥ 0) γραμμές και κάποιες (≥ 0) στήλες του A.

Παράδειγμα: Ο $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ είναι ο υποπίνακας του $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι τετραγωνικοί υποπίνακες του A γιατί μπορούν να μας πουν τη βαθμίδα(A).

2×2 υποπίνακες A^* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ με ορίζουσες $0, 0, 0$

Οι 2×2 υποπίνακες του B $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ με ορίζουσες $0, 1, 1$

Πρόταση: Έστω $A \in F^{\nu \times \mu}$ με $A \neq \mathbb{O}_{\nu\times\mu}$. Θέτουμε $d =$ βαθμίδα(A). Τότε: (χωρίς απόδειξη)

i) $d \leq \nu$ και $d \leq \mu$

ii) $d = \max\{k \in \mathbb{Z} :$ υπάρχει $k\times k$ υποπίνακας του A με $\det B \neq 0\}$

Παράδειγμα: Έστω $A \in R^{4\times5}$, $A \neq \mathbb{O}_{4\times5}$ $d=$ βαθμίδα(A)
Τότε βαθμίδα$(A) \leq 4$

i) βαθμίδα $(A)=4 \iff$ υπάρχει 4×4 πίνακας B του A με $\det B \neq 0$

ii) βαθμίδα$(A)=3$ αν και μόνο αν 4×4 υποπίνακα B του A έχει μηδενική ορίζουσα και υπάρχει 3×3 υποπίνακας C του A με $\det C \neq 0$

iii) βαθμίδα$(A)=2$ αν και μόνο αν κάθε 4×4 και 3×3 υποπίν. B του A έχει μηδενική ορίζουσα και υπάρχει 2×2 υποπιν. C του A (με $\det C \neq 0$)

iv) βαθμίδα$(A)=1 \iff$ κάθε $4\times4, 3\times3, 2\times2$ υποπ. του A έχει μηδενική ορίζουσα και υπάρχει στοιχείο του A μη μηδενικό.

Παράδειγμα: $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix} \in R^{2\times3}$. Τότε από πρόταση

βαθμίδα$(A) \leq 2$ και

i) βαθμίδα$(A)=2 \iff$ υπάρχει 2×2 υποπίνακας του A με μη μηδενική ορίζουσα αλλά τέτοιος B δεν υπάρχει
άρα βαθμίδα$(A) \neq 2$

ii) βαθμίδα$(A)=1 \iff$ κάθε 2×2 υποπ. του A έχει μηδενική ορίζουσα και υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο του A που ισχύει. Άρα βαθμίδα$(A)=1$.

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Βρείτε βαθμίδα(A).

Απάντηση. Πρόταση βαθμίδα(A) ≤ 4.

i) βαθμίδα(A)$=4 \iff$ ύπαρξη 4×4 υποπίνακα B του A με μη μηδενική ορίζουσα. Αλλά ο μοναδικός 4×4 υποπ. του A είναι ο A και $\det A=0$ (με ανάπτυξη στην πρώτη στήλη)

Άρα βαθμίδα(A)≤ 3

ii) βαθμίδα(A)$=3 \iff$ κάθε 4×4 υποπίνακας του A έχει ορίζουσα μηδέν και υπάρχει 3×3 υποπίνακας C του A με $\det C \neq 0$

Αυτό ισχύει γιατί στο i) δείξαμε $\det B=0$ για κάθε 4×4 υποπίνακα του A και ο

$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ είναι 3×3 υποπίνακας με $\det C = 1\cdot2\cdot3 = 6 \neq 0_{\mathbb{R}}$

Συμπέρασμα βαθμίδα(A)$=3$

Ορισμός: Έστω $A \in F^{\nu\times\mu}$.

α) Θεωρούμε τις ν γραμμές του A σαν στοιχεία του F^{μ} και ορίζουμε ΧΩΡΟ ΓΡΑΜΜΩΝ V_1 του A να είναι ο υπόχωρος του F^{μ} που παράγεται από αυτές.

β) Θεωρούμε τις μ στήλες του A σαν στοιχεία του $F^{\nu\times1}$ και ορίζουμε χώρο στηλών W_1 τον υπόχωρο του $F^{\nu\times1}$ που παράγεται από αυτές.

Πρόταση χωρίς απόδειξη: $\dim V_1 = \dim W_1 = \text{βαθμίδα}(A)$

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

Τότε χώρος γραμμών V_1 του A είναι ο υπόχωρος $V_1 = \langle (1,5,7), (2,4,8) \rangle$ του $\mathbb{R}^3$ και χώρος στηλών των W_1 του A είναι υπόχωρος $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$

Εύκολα βλέπουμε $\text{βαθμίδα}(A) = 2$ (γιατί $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$)

και άρα από την πρόταση $\dim V_1 = \dim W_1 = 2$